RESISTANCE DES MATERIAUX (COURS 3 EME ANNEE)

I- Traction :

Une pièce est soumise à la **traction** lorsque la **force** qui la sollicite agit au **centre de gravité** de sa **section**.

L'effort produit est l'allongement de la pièce. Soit une barre d'acier bien scellée dans une poutre et supportant une **charge** exerçant un effort N. toutes les fibres intérieures subissent le même allongement. La contusion des sections intérieures de la section droite **S** est uniforme, lorsque l'élément de section est soumis à un effort unitaire.

1- Contrainte normale de traction : (Ò)

$$\text{Ò} = \frac{F}{S} = \frac{N}{S} = \frac{P}{S}$$

F = force

N = effort

P = charge

(**Ò**) = segment de contrainte

S = surface

La contrainte Ø dépend des matériaux

F = (**N**) Newton

S (**cm^2**; **mm^2**)

$$\text{Ò} = \frac{F}{S} = N/cm^2 \ ;\ N/mm^2 \ ;\ MPa$$

2- Unite de contrainte :

Ò /N (mm_2)	**(N/cm_2)**
(daN/mm_2)	**(N/m_2)**
(KN/mm_2)	**(daN/cm_2)**

3- Allongement absolu :

lo = la longueur initiale

L = longueur allongée

ΔL = Allongement absolu

L = lo + ΔL

ΔL = L – lo

4- Courbe contrainte de déformation :

La courbe contrainte de déformation est une courbe caractérisant le matériau. Elle est obtenue empiriquement lors d'une expérience de traction effectuée sur une barre de section constante.

Lors de cette expérience, l'effort normal est augmenté progressivement, provoquant l'allongement de la barre. A chaque amplement d'effort, la contrainte normale de la déformation est portée sur une courbe, cette opération est effectuée régulièrement jusqu'à la rupture de la barre.

Nous pouvons décomposer le processus en trois parties :

a- La zone de déformation élastique : dans cette zone, **F < Fe** droite **OA**. Dans cette zone

l'allongement est proportionnel à la force de traction exercée. Lorsque la force cesse, la barre reprend sa forme initiale. Celle-ci se comporte comme un ressort.

Allongement relatif **Ɛ** (**epsonore**)

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{Lo} \quad (3). \qquad \grave{O} = \varepsilon . E \ (4)$$

E = module de **Young** ou module d'élasticité. Cette relation linéaire s'appelle la **loi de Hooke**.

b- **Zone de déformation permanente :**

Courbes **ABC Fe < Fc Fr**

la force limite élastique étant atteinte, la barre continue de s'allonger tant que la force est nécessairement augmentée. La barre restera déformée même si la force est annulée. C'est une déformation dite plastique.

c- **Zone F > Fr :**

La structure progressive de la barre subit une diminution brutale de sa section avec étranglement ou striction ce qui réduit la force de traction que l'allongement augmente brutalement. La rupture est amorcée si elle survient au point **E**.

$$\grave{O} = \varepsilon \times E$$

$$\text{Avec } \varepsilon = \frac{\Delta L}{lo} \quad / \quad \frac{\Delta L \times E}{lo} \qquad \Delta L \times E = \grave{O} \times lo$$

EXERCICE 1:

Soit une barre en acier de diamètre 20 mm et de longueur 7 m est sollicitée par un effort de traction 5 500 daN.

1- Calculer la contrainte de traction.
2- Déterminer l'allongement sachant que le module de Young E = 200 000 N/mm^2.
3- Calculer la longueur allongée.

EXERCICE 2 :

Soit une barre circulaire de longueur 5,5 m, après avoir appliqué une force de 7 000 N la barre s'est allongée de 5 cm sachant que le module Young est 200 000 daN.

1- Détermine le diamètre de la barre.
2- Quelle force fait allonger la barre à 5,5 m ?
3- Calcule la contrainte de traction de cette force.

EXERCICE 3 :

Soit un tirant en acier de module élastique longitudinal 210 000 N/cm^2 de 5 m de long et 120 mm de diamètre, admettant une limite d'élasticité de 240 N/cm^2. Calcule :

1- l'effort normal de traction,
2- l'allongement absolu du tirant,
3- l'allongement relatif du tirant,
4- la longueur finale di tirant.

Solution 1 :

Données :

D = 20 mm

lo = 7 cm

N = 5 500 daN = 55 000 N

E = 200 000 N/mm^2

1- La contrainte :

N

Ò = ----

S

$$S = \frac{\pi\, o^2}{\mu}$$

$S = 3{,}14 \times 20^2$

$$Ò = \frac{N}{S} = \frac{55\ 000}{314} = 175{,}15\ N/mm^2$$

$Ò = 175{,}15\ N/m^2$.

2- La force qui fait allonger la barre est :

$$\Delta L = \frac{N \times lo}{S \times E} = \frac{55\ 000 \times 7\ 000}{314 \times 200\ 000} = \frac{385\ 000\ 000}{628\ 000}$$

$\Delta L = 0{,}615$.

3- La contrainte de traction de cette force est :

$L = lo - \Delta L$

$L = 7\ 000 + 6{,}13 = 7\ 006{,}13$

$L = 7\ 006{,}13$.

<u>Solution 2 :</u>

Données :

lo = 5,5 m = 550 cm

F = 7 000 N = 7 000 daN

ΔL = 5 cm

E = 2 000 000daN/cm^2

1- Le diamètre de la barre est :

$$D = \frac{-\sqrt{uS}}{n}$$

$$S = \frac{F \times lo}{\Delta L \times E} = \frac{7\,000 \times 550}{5 \times 2\,000\,000} = 0{,}385 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{\sqrt{4 \times 0{,}385}}{3{,}14} = 0{,}700 \text{ cm}$$

D = 0,700 cm.

2- La force qui fait allonger la barre est :

L = 5, 59 m = 559 cm

ΔL = L – lo = 559 – 550

ΔL = 9.

$$F = \frac{N \times S \times E}{lo} = \frac{9 \times 0{,}385 \times 200\,000}{550}$$

F = 12 600 N.

3- La contrainte de traction de cette force est :

$$Ò = \frac{F}{S} = \frac{12\ 600}{0,385} = 32\ 727,\ 27$$

Ò = 32 727, 27.

<u>**Solution 3:**</u>

Données :

F = 210 000 N/cm

lo = 5 m = 500 cm

D = 120 mm = 12 cm

Ò = 240 N/cm

1- l'effort normal de traction est :

$$Ò = \frac{N}{S} = N = Ò \times S$$

$$S = \frac{\pi D^2}{µ} = \frac{3,14 \times (12)^2}{µ}$$

S = 113,04 cm.

N = 240 x 113,04 cm

N = 27 129,6 N.

2- **l'allongement absolu du tirant est :**

$$\Delta L = \frac{N \times lo}{S \times E} = \frac{27\,129{,}6 \times 500}{113{,}04 \times 210\,000}$$

$\Delta L = 0{,}57$ cm.

3- **l'allongement relatif du tirant est :**

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{lo} = \frac{0{,}57}{500} = 1{,}14.10^{-3}$$

$\varepsilon = 1{,}14.10$-3Ш.

4- **la longueur finale du tirant est :**

L = ΔL + lo = 0,57 + 500 = 500,57

L = 500,57 cm.

II- Rappel sur les Réactions d'Appui :

La science communément appelée « **résistance des matériaux** » a pour but d'apprendre à déterminer la **grandeur**, la **dimension** à donner à l'ouvrage.

Cette détermination permet d'assurer la sécurité en évitant la rupture ou la déformation exagérée de cet ouvrage et permet de réaliser le maximum d'économie dans la construction :

- Soit de déterminer la limite maximale que peut atteindre la sollicitation appliquée au solide

dont la forme et les s sont données.

- Soit de calculer les dimensions alors que les sollicitations sont imposées afin que les

soient moindres et réversibles.

Il est donc nécessaire de rechercher par des essais comment les matériaux utilisés vont pouvoir réagir à certaines sollicitations que provoquent les applications des forces extérieures.

Pour résoudre les problèmes de résistance, il faut dissocier les différentes pièces et leurs appuis et les rendre libres dans l'espace.

Exemple :

Une poutre transmet les charges qu'elle supporte à ses appuis (**murs**, **poteaux**). Puisqu'il y a équilibre, les appuis transmettent à la poutre des forces égales et opposées à **P**, ce sont les réactions d'appui.

a- Sens des forces :

Par convention, on donne :

- Sens positif des forces agissant de bas en haut,
- Sens négatif des forces agissant de haut en bas.

b- Condition d'équilibre :

Lorsqu'un solide est soumis à des forces, il peut se déplacer sous l'action des forces mais il peut aussi rester immobile. Il faut pour cela que les actions des forces se compensent.

- **Définition :**

Un point est en équilibre s'il reste indéfiniment immobile, lorsqu'il est soumis à l'action d'un système de forces dans un même plan.

Il sera immobile si les différentes forces qui le sollicitent n'ont pas d'action sur lui, c'est-à-dire si la résultante du système des forces est nulle. Cette force sera nulle lorsque la projection des forces sur les deux axes sera nulle.

X = 0

Y = 0

c- Les Types d’appui :

On distingue :

- appui simple sur rouleau au mur
- articulation : composante verticale et horizontale
- encastré au poutre sur mur

III- Compression simple :

1- Définition :

Une pièce est soumise à la compression lorsque la force qui la sollicite agit sur l’axe passant par le centre de **gravité** de la section, l’effort produit est le raccourcissement de la pièce.

Dans le cas des métaux, la résistance à la compression est presque la même que la résistance à la traction.

2- Déformation :

Changement de forme d’un corps sous l’action de forces, de variations de températures, etc.la déformation peut être **élastique** ou **permanente** suivant qu’elle subisse ou non après suppression de la cause qui l’a produite. La déformation est toujours proportionnelle à l’effort exercé sur la pièce.

3- Différents cas de rupture :

a- Elancement :

- Une pièce courte comprimée se rompt par écrasement.
- Une pièce longue comprimée se rompt par flexion.

Suivant la longueur de la pièce par rapport à sa section, on distingue les pièces courtes et les pièces longues. Le rapport entre la longueur de la pièce et sa plus petite dimension s'appelle élancement.

$$e = \frac{L}{b}$$

inférieur

$e < 6$ -------→ pièce courte

$e > 6$ -------→ pièce longue

b- Pièce longue :

Il faut diminuer la contrainte admissible au fur et à mesure que $\frac{L}{b}$ augmente.

c- Pièce courte :

$$O = \frac{L}{S}$$

Tableau : Coefficient réducteur.

L/b	coeff	L/b	coeff	L/b	coeff	L/b	coeff	L/b	coeff
1	b	18	1 /36	26	b 17/36	34	b 13/36	42	b 1/11
12	6	20	6 11/8	28	b 11/9	36	b 1/3	44	b 2/9
14	b 1/9	22	b 5/9	30	b 5/12	38 5/12	b 11/36	46	b 7/36
16	b 13/18	24	b 1/2	32	b 7/18	40	b 5/18	48	b 1/6

EXERCICES :

EXERCICE 1 :

Un étai de 2,20 m de long et de 10 cm de diamètre doit supporter une charge de 1.600 kg. Les taux de travail admissible étant de 5 méga Pascal (MPa).

1- Vérifie que la section de l'étai est suffisante.

EXERCICE 2 :

Un poteau de section carrée mesure 2,70m et supporte une charge F = 200 000 N, sa résistance pratique **Rp** = 80 N/mm$_2$.

Calculer :

1- les dimensions du poteau
2- le raccourcissement du poteau **ΔL**
3- la déformation du poteau. On donne E = 54 000 N.

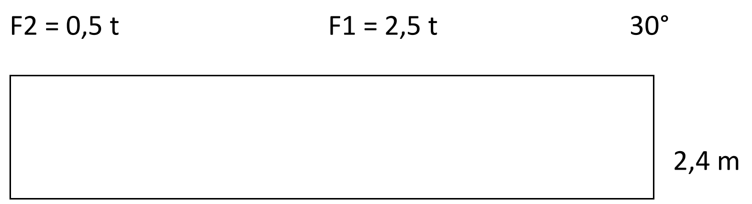
EXERCICE 3 :

Un étai en bois de 2,6 m de long ayant une section carrée de 10 cm de côté doit supporter un effort de 2 950 daN.

1- Calcule la contrainte de compression dans l'étai.

EXERCICE 4 :

Un poteau de section carrée encastré en A est soumis à un système de forces (voir figure)



- Déterminer les réactions en **A**
- En déduire la valeur de l'effort normal N dans le poteau
- En déduire la valeur de l'effort tranchant **T** qui agit sur le poteau
- Calcule la dimension du poteau sachant que la contrainte de compression du béton est:

Ò$_B$ = S daN/cm2

- Calcule la contrainte de cisaillement de la section du poteau

1 bar = 1 daN/cm^2 = 10 N/cm^2 = 1/10 N/m^2

1 daN/mm^2 = 1/10 daN/mm^2 = 10 bars

1MPa = 10^5 Pa = 1 N/mm^2 = 10 bars

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2

1 km = 10^3 m = 1 000 m

1 m^3 = 10^6 cm^3 = 10^5 mm^3

1 l = 10 dal = 100 Q = 1 000 ml

1 tonne = 1 000 kg.

Solutions:

EXERCICE 1:

Données :

L = 2,8 m = 280 cm

D = 10 cm

P = 1 600 kg

Ò = 5 MPa

1- **La surface de l'étai est :**

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14\,(10)^2}{4} = 78,5 \text{ cm}^2$$

2- **Calculons l'élancement :**

$$e = \frac{L}{b} = \frac{280\ cm}{10\ cm} = 28\ cm$$

e = 28 > (>) PL.

- **Les niveaux de travail :**

$$4/9\ Ò = \frac{4}{9} \times 5 = 2{,}22\ MPa$$

- **Vérification de la section :**

$$Ò = \frac{N}{S} = N = Ò \times S$$

N = 2,22 MPa x 78,50 cm

N = 17 427 N.

EXERCICE 2 :

Données :

H = 2,70 m = 2 700 mm

F = 200 000 N

Rp = 80 N/mm^2

E = 54 000 N/mm^2

1- **Les dimensions du poteau sont :**

$S = a \times a = a^2$

$$\grave{O} = \frac{F}{S} \leq Rp$$

$$S = \frac{F}{Rp} = \frac{200\,000\ N/\ mm^2}{80\ N/m^2}$$

$S = 2\,500 = a^2$

$a = \sqrt{2}500$

$\sqrt{a}$ = 50 mm

2- Le raccourcissement du poteau est :

$$\Delta L = \frac{\grave{O}.h}{E} \quad \Delta L = \frac{80 \times 2\,700}{54\,000}\ 4\ mm$$

$\Delta L = 4$ mm.

3- La déformation du poteau est :

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta L}{h}. \quad \mathcal{E} = \frac{4}{2\,700} = 0{,}0014\,815$$

$\mathcal{E} = 14{,}815.10^{-4}$

IV- Le Cisaillement :

Si **T** est l'effort tranchant qui provoque le cisaillement et **S** la section à cisailler de la pièce, la contrainte tangentielle de cisaillement est donnée par :

T----> Kg ; daN ; N

Ɲ = ---

S----> cm2   Ɲ ---> Kg T---->

La déformation élastique est angulaire et soutenue par glissement de la partie libre sur la partie encastrée. Elle est notée **Ϫ**.

T   Ɲ

Ϫ = ---- = Ϫ = ----

GS   G

G = le **module d'élasticité** transversale ou le **module de glissement**.

G = 0,4 SE.

Si **ƝW** est la contrainte d'utilisation de glissement, la résistance est établie lorsque :

Ɲ ≤ Ɲw.

EXERCICE 1 :

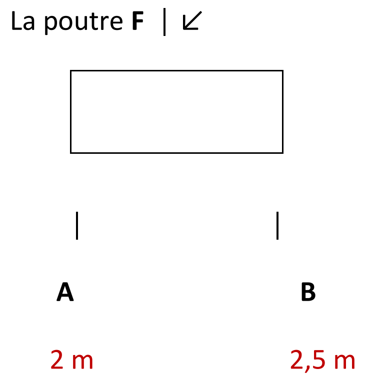
Quel effort faut-il exercer pour cisailler une barre en acier de 15 cm x 4 cm de section admettant une contrainte de cisaillement de 10 MPa ?

EXERCICE 2 :

Une poutre en console est soumise à un effort tranchant de 9 800 Kg. Si la poutre admet une contrainte normale de traction de 90 bars, calculer la section de la poutre.

EXERCICE 3 :

Soit une poutre en béton armé de section15 x 25 cm^2, de longueur 4,5 m appuyée simplement sur deux poteaux en A et B, soumise à une charge ponctuelle de 3 850 daN appliquée à 2 m de l'appui A (voir figure).



Si le BA a un poids volumique de 2,5 t/m^3, on demande :

1- la charge repartie q de la poutre
2- faire un schéma de calcule
3- la contrainte tangentielle de cisaillement de la poutre F.

V- Les Systèmes triangulés :

1- Généralité :

En **topologie**, **méthode de relèvement** qui permet de **repérer** la **position** d'un ou de plusieurs **points** en utilisant le **calcul trigonométrique**.

Dans ce but, on détermine une base initiale, formée par la distance mesurée directement entre le **point d'observation** et un **point fixe** ; on prend cette base comme côté d'un **triangle**, qui peut être supposé **équilatéral**, dont les côtés forment les bases d'une suite de **triangles adjacents**.

On détermine ensuite les **sommets** (points de la triangulation) successifs en mesurant, avec des instruments topographiques, les **angles** que les **droites** joignant ces sommets font avec les derniers des côtés des triangles calculés de proche en proche.

On obtient ainsi, la mesure de la distance entre les extrémités de chaque côté et les points (sommets) à localiser.

Un **système triangulé** est un ensemble de **barres** droites articulées entre elles et formant un **triangle** et constituant un corps rigide. Encore appelé **trèfles**, il est destiné à supporter de très grandes charges.

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

ΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔΔ

Les poutres en système triangulé sont composées de :

- Deux membrures horizontales **AJ** et **BI**
- Montants verticaux **AB CD EF AG JI**
- Diagonales **BC CF FG HI**

Les membrures et les montants sont appelés barres, ils sont droits et rigides et ont la masse négligeable. Les barres se rencontrent aux points **A B C D E F G H I J**.

Ces points sont appelés **nœuds** et sont constitués par des articulations et ne s'opposent pas aux variations angulaires.

2- Méthode de calcul des efforts :

Pour trouver les efforts de barre d'une poutre en treillis, on a deux méthodes :

- la première ayant à la base l'équilibre d'un point matériel
- la deuxième l'équilibre d'un point solide ou d'une partie solide.

3- La méthode d'isolement des nœuds :

Dans cette méthode, après avoir trouvé les forces de liaison des réactions, on prend chaque nœud séparément et on le considère comme un point matériel soumis à l'action des forces concurrentes.

Donc pour chaque nœud on peut écrire deux équations d'équilibre statique :

Ɛ pe i = 0 et Ɛ yD = 0 il est nécessaire de commencer avec nœud ayant deux inconnus (puisque qu' dispose seulement que deux équations, pour chaque nœud on va continuer avec le nœud qui reste avec deux inconnus chaque fois.

VI- Les Moments : Rappels sur la détermination du centre de gravité.

1- Gravité :

On appelle **gravitation**, la **force attractive** qu'exerce tout **corps massif** sur tout autre corps. Le phénomène peut être soumis à l'**expérience** en suspendant un corps au **bras** d'une **balance de torsion** et en approchant un autre corps placé sur un support fixe : le bras de la balance tend à tourner vers ce dernier.

On peut observer que, lorsque la distance entre les corps varie, l'**intensité** du phénomène varie aussi : la force agissant dépend des **positions**. Cela signifie que l'**espace** entre autour d'un corps quelconque est le siège d'un **champ de forces**.

On peut donc définir en tout point un **vecteur** (fonction des **coordonnées spatiales**) qui représente, en **direction**, **sens** et **intensité**, l'action à laquelle est soumis un autre corps. Le champ ainsi défini prend le nom de **champ de gravitation**.

2- Enoncé :

La gravitation est donnée par la **loi de Newton**, appelée aussi **loi de gravitation universelle** (l'**attraction** entre deux corps est proportionnelle au **produit** de leurs **masses** et inversement proportionnelle au **carré** de leur **distance**). Elle s'exprime par la formule :

$$F = G \frac{mM}{R^2}$$

qui toute fois s'écrit plus correctement sous forme vectorielle :

$$F = G \frac{mM}{R^2} \frac{r}{r}$$

Dans cette formule, **m** et **M** sont les masses des deux corps P_m et P_M, **r** leur distance, **F** est le vecteur joignant P_m à P_M, **F** la force exercée par P_M sur P_m, **F/r** indique la direction de la force dont support est toujours la droite joignant les deux corps.

Le coefficient **G**, appelé **constante de gravitation universelle**, a été mesuré pour la première fois par **H. Cavendish** (1798). Il vaut, dans le système S.I. : $6{,}67.10^{-11}$ Nm/kg^2.

Il ne dépend pas du milieu où se produit le phénomène, ni de la nature des corps des corps considérés. On peut en outre définir le vecteur champ de gravitation du corps P_M :

$$X = F/m$$

qui représente la force agissant sur la masse unité à chaque point, indépendamment de la présence en ce point d'un corps quelconque. Le champ de gravitation est **conservatif** et admet donc une fonction potentielle **U = - GM/r**.

Il est possible de calculer le **travail** de la force de gravitation dans le déplacement d'un corps de masse **m** d'un point **A** à un point **B** :

$$e = m\,(U_B - U_A).$$

3- Expression :

Des lois de la **dynamique** de Newton et du concept de champ gravitationnel découlent toutes les **lois** de la **mécanique céleste**. La force d'attraction exercée par la **Terre** sur un corps constitue une force de gravitation : le **mouvement** d'un **projectile** dans le **vide**, la chute d'une pomme sur le **sol**, le mouvement de la **Lune** autour de la Terre sont des phénomènes tout à fait analogues car la **pesanteur** sur la **Planète** ou sur la Terre, n'est pas autre chose qu'un cas particulier de la gravitation universelle.

4- Le moment d'une force :

a- Définition :

Le moment d'une force par rapport à un axe fixe **Δ** ou à un point **O** est le produit algébrique de l'intensité de la force par le bras du levier.

MF /Δ = MF/O = ± F x d

N.m N m

Le moment est positif si la force a tendance à tourner le système dans le sens **trigonométrique**.

Le moment est négatif si la force à tendance à faire tourner le système dans le sens des aiguilles d'une montre.

MF/O = - F x d

N. m N m

Le moment statique par rapport à l'axe OY est égal à la somme algébrique des nombres de tous les éléments de la surface par rapport à l'axe OY.

MS/OY = ƐdSi Yi

b- Théorème d'Huygens :

Le moment statique d'une surface S par rapport à l'axe situé dans son plan est égal au produit de l'air de la surface par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

- Les coordonnées du centre de gravité **XG** et **YG**
- Moment statique par rapport à l'axe **OY**
- **MS/OX = ƐdSiYi = S. YG**
- **MS/OY = ƐdSi Yi = Ɛ YG**

c- Unités :

Air S -------------> cm_2

XG et YG --------> cm

ns/ox et M_2/OY = Q

d- Propriétés :

- Si l'axe **OX** passe par le centre de gravité, le moment statique par rapport à **MS/OX = 0**.
- Si l'axe OY passe par le centre de gravité : **MS/OY**.

e- Les Couples de forces :

1- Définition :

Un couple de force est un ensemble de deux forces parallèles non confondues, de sens contraire et de même intensité.

Exemple : utilisation d'un **tourne-vis** ou d'un **tire-bouchon**. Tout couple a un sens. Si la rotation se fait dans le sens du couple : on dit qu'on a un **couple moteur** ; dans le cas contraire on a **couple résistant**.

f- Le moment d'un couple de forces :

a- Définition :

Le moment d'un couple de forces est le produit algébrique de l'intensité commune des deux forces par la résistance qui sépare leur **droite d'action**.

M = ± F x d

VII- La Flexion simple :

Soit une poutre sur un élément, on applique une élévation et on observe qu'elle se déforme et prend une forme curviligne. L'application de cette charge provoque des sollicitations.

- **Les moments fléchant** (Mf) qui est égal à la somme des moments de toutes les forces situées

à gauche de la section.

- **L'effort tranchant** (ET) qui est égal à la somme de toutes les forces situées à gauche de la section.

- **L'effort normal (n) et effort partiel**.

+

--→ ligne de référence

-

Moment fléchissant